

地震波を含む非線形波動の数理解析

高村 博之 [公立はこだて未来大学システム情報科学部複雑系科学科／准教授]

上見 練太郎 [公立はこだて未来大学システム情報科学部複雑系科学科／教授]

津田谷 公利 [北海道大学大学院理学研究院数学部門／准教授]

横山 和義 [北海道工業大学／准教授]

背景・目的

弾性波動方程式系は、色々な材質の振動現象や地震波などを記述する基礎方程式として重要である。物理や工学では線形近似と数値解析により、解の短時間挙動の追跡が発達している。一方、数学では微小振動という仮定のもとで、解の長時間挙動に関する数学的に厳密な解析が行なわれている。近年、弾性体が境界を持たない場合に、解の2階導関数が長時間にわたって制御できるか否かの判定条件が確定された。そこで本研究ではより実際の状況に近いモデル、弾性体が境界を持つ場合に数学的に厳密に解析し、解の長時間挙動を明らかにすることを目標とした。

内容・方法

境界がない全空間での非線形方程式系に対しては、解の最大値評価とエネルギー評価を上手く組み合わせて時間局所解を延長することにより解析が行われる。境界がある場合では、一般には線形方程式系の解の表示が得られないことから、解の最大値評価を作ることが困難となる。ただ弾性体が境界で振動していないという人工的な状況では、線形方程式系の局所エネルギーの時間減衰評価を用いてその困難を克服できる。しかし本研究では弾性体が境界でも振動している自然な状態を扱うため、今までに証明されたことのない、いわゆるノイマン条件下での線形方程式系に対する局所エネルギーの時間減衰評価が必要となる。

弾性波は縦波と横波に分解できるが、境界と接触後にそれぞれから新たな波が発生し、状況が複雑になる。本研究ではまず縦波または横波しか発生しない特殊な状況を設定し、境界上に発生する波を込めてどのようなエネルギーが作られるか解析するという手法に特色がある。

結果・成果

本研究が対象とした問題は、外部領域と呼ばれる全空間に有界な障害物がある領域での弾性波動方程式系に対する初期境界値問題である。

まず弾性体の変位が回転不变であるという状況を扱った。この場合の対象となる問題は、縦波と同じ速度を持つ空間5次元における球対称波動方程式に対する初期境

界値問題と同等になる。つまり横波は発生していない状況になる。またこのときの境界条件は第3種である。これについては先行研究で既に全エネルギーの有界性が証明されている。そこで局所エネルギーの時間減衰評価を導出するために、波動方程式の初期境界値問題では一般的な方法に従い、方程式にいわゆる Morawetz multiplier を掛けて時空間で積分した。しかし境界上で変位の2乗を時間変数に関して積分した量と、時間変数とエネルギーとの積という2つの量の差に対する評価しか得られなかった。これはレイリー波と呼ばれる境界上を走る波が発生しているためと予想される。

次に弾性体の変位が発散自由であるという状況を扱った。この場合の対象となる問題は、横波と同じ速度を持った空間5次元における球対称波動方程式に対する初期境界値問題と同等になる。つまり縦波は発生していない状況になる。またこのときの境界条件は第2種である。これについても全エネルギーが有界であることが本研究で証明された。更に回転不变と同様に方程式に Morawetz multiplier を掛けて時空間で積分したところ、部分積分の技巧的な運用により、時間変数に関して1次のオーダーで局所エネルギーが減衰することが証明された。この結果に波動方程式に対して成立する Morawetz の理論を適用すると、その減衰は指數関数的になることがわかる。これにより非線形問題の解析への最も重要な準備が整つたことになった。約40年前に証明された Morawetz 理論について、その適応例はこれまでエネルギーに境界項が含まれない第1種境界条件付き問題ばかりであったが、本研究の結果は初めてそれ以外の状況での適応例となり、数学的な興味からも意義深い結果となった。

弾性波動方程式系に対する初期境界値問題の一般的な状況では、横波は境界に対して垂直方向に振動する SV 波と水平方向に振動する SH 波で構成されていることが知られている。本研究で扱った発散不变な変位は SH 波のみを抜き出している状況に相当することが、線形問題の専門家によって指摘された。これがレイリー波の影響を受けずに、局所エネルギーの時間減衰評価を導出することができた成功要因と思われる。この点からも、非線形問題のみならず線形問題に対しても新しい視点を導入したと言える。

今後の展望

まず非線形方程式系に対する発散自由な解が、時間大域的に存在することが望まれる。これは本研究の主要成果である局所エネルギーの時間減衰評価を用いて行われるが、解析の手法がほぼ揃った状態なので大きな困難はないと思われる。次に回転不变な解に対しては局所エネルギーの時間減衰評価が出せないことが予想されるが、それが確定した場合には原因を定式化し、それを用いて一般の解の状況を説明できるようにすることが望まれる。また本研究とは方向性が異なるが、内部領域における問題の解析も大きな課題として残っている。