冪乗型反応拡散方程式系における同時･非同時爆発解の解析

山内 雄介［早稲田大学先進理工学部／客員助手］
（前 北海道大学大学院理学研究院数学部門/学術研究員）

背景・目的

燃焼現象やさまざまな化学現象を記述するモデルである反応拡散方程式やその連立方程式系の解の研究が近年盛んに進められている。ある時間を境に解が増大し発散する「解の爆発」は、燃焼現象においては発火を意味し、その瞬間の解の挙動解析は実際の現象を分析する上で重要である。

特に反応拡散方程式の連立方程式系においては、方程式系を構成する2つの解が非線形項の形状により「同時爆発」や「非同時爆発」を起こすことが既存研究により知られている。本研究では、同時･非同時爆発のメカニズムのさらなる理解を目的として、既存研究を更に一般化した連立方程式系における同時爆発･非同時爆発の解析を行った。

内容・方法

(1) 解の同時爆発性と、その際の2つの解の爆発増大度の解析

1999年のChlebik-Filaの手法を基に解析を試みる。本方程式系にも自己相似解が存在することから適切な自己相似変換を施し、反応拡散方程式における正則性評価を適用する。

また報告者の先行研究において、爆発解が存在すること自体は(1)･(2)共に解明されている。この事実を証明内で用いる。

(2) 解の非同時爆発性と、その際の爆発増大度の解析

2001年のQuiros-Rossiの手法を基に解析を試みる。本研究で扱う連立方程式の基となる単独方程式における爆発増大度の結果を用いて、一方の解は爆発するがもう一方の解は爆発せずに有界に留まる事実を示す。本研究においては従来使われていた「L∞ノルム」に変えて、計算の相性が良い「重み付きL∞ノルム」を採用する。

結果・成果

(1) 解の同時爆発性と、その際の2つの解の爆発増大度の解析

非線形項がある条件を満たす特別な場合において、解の同時爆発性とその爆発増大度を明らかにした。具体的には、解の初期状態が非零の場合にその条件下で同時爆発を起こすことを示し、また非線形項の冪指数を用いてその爆発増大度を具体的に表すことができた。得られた爆発増大度は予想されていた物と合致しており、また先行結果から鑑みても自然であることから、結果は最適であると考察される。

手法は2. (1)で述べたChlebik-Filaのものを基本とするが、次の3点において変更を行った。

[A] 自己相似変換の変更。扱う方程式系が先行結果と異なるため、自己相似変換を方程式系に合う形に変え解析を試みた。

[B] 内部正則性評価を行う領域の変更。本研究では原点において非線形項が特異性を有しているため、その問題を回避すべく評価を行う領域の変更を行った。

[C]「爆発解の存在･非存在」に関する報告者の先行結果の適用。報告者は今回扱う方程式系において「解の非存在」に関する結果を2006年に示している。これを用いることで、本研究においても証明が可能となった。

一方、その条件を満たさない非線形項についても、解がいくつかの点において上記と同様な性質を有していることから、同様の結果が示される可能性が高いことが示唆される。今後も、特に上記[B][C]に注意を払いながら解析を続ける。

(2) 解の非同時爆発性と、その際の爆発増大度の解析

非同時爆発についても特別な条件下で、解の同時爆発性とその爆発増大度を明らかにした。証明は、Quiros-Rossiの手法に以下の2つを導入して行った。

・本方程式系と同様な非線形項を持つ楕円型偏微分方程式の解の非存在定理。これは1981年にGidas-Spruckが示した結果を用いた。

・本方程式系と同様な非線形項を持つ単独方程式の解の爆発増大度。1987年のGiga-Kohnのアイデアを元に、証明を行った。証明の際には上記の楕円型偏微分方程式の解の非存在定理を用いる。

(2)における条件は(1)のものよりもより強い条件であるが、本研究で扱う方程式系における非同時爆発解の存在の提示は非線形現象のメカニズムを解析する上で有用である。また、更なる結果の拡張には証明上の問題点となっているGidas-Spruckの結果の改良に取り組むことが不可欠である。

今後の展望

以上において特別な条件下では同時･非同時爆発性を示したことで、より一般化した方程式系における同時･非同時爆発のメカニズムや法則性の理解が進展し、他の現象を記述するモデル方程式の解析においても結果や手法が生かされることが期待される。

一方、条件を外した場合においては、同時爆発性･非同時爆発性は明らかになっていない。それらを示すために、(1)においては変更点[B][C]の更なる改良を、(2)においてはGidas-Spruckの結果の拡張を試みる。それらの改良･拡張がダイレクトに証明内で反映されることから、(1)(2)共に更なる結果が期待できる。