数値微分法の医療診断への応用

中村　玄［北海道大学大学院理学研究院／教授］
坂上 貴之［北海道大学大学院理学研究院／助教授］
王　盛章［北海道大学大学院理学研究院／博士後期課程3年］
菅　幹生［千葉大学工学部／助教授］

背景・目的

数値微分法とは、逆問題における研究テーマの一つである。即ちk回連続微分可能な未知関数の有限個の点における近似値（以下観測データとよぶ）が与えられたとき、それから未知関数を近似的に復元（以下再構成とよぶ）したり、その未知関数がk+1回微分可能でない点を見つけたりする方法（以下不連続性の同定とよぶ）のことである。本研究開発の数値微分法は、Tikhonovの正則化による最小二乗法に基づく再構成の方法で、これまでの数値微分法の欠点を克服する新しい方法である。本研究では、数値微分法による未知関数の再構成と不連続性の同定を、MRE（magnetic resonance elastography）法による初期乳癌の診断法に応用することを目的とする。

内容・方法

MRE法という計測技術では、人体などの柔らかい非圧縮等方弾性体を振動させたときに生じる横波を計測できる。これを数値微分法と組み合わせて次のように利用すると、人体の部位の仮想的触診が可能であり（即ち堅さが計れ）、MRIによる診断では発見が非常に難しい初期の乳癌が周辺組織よりもはるかに硬いことに着目すれば、初期の乳ガンを効果的に発見できる。今簡単のため人体の弾性係数は、区分的に均質（即ち定数）とし、密度ρは均質とする。観測データとして、MRE法で計測した周波数kの横波の変位ベクトルの一成分uの有限個の点における値をとる。数値微分法によりuとそのラプラス作用素Δによる微分Δuを近似的に求め、uが満たすHelmholtz型方程式：$(\rho k^2+\mu\Delta)u=0$を使って、(＊) $\mu=\rho k^2 u/(\Delta u)$（せん断率）を近似的に求めることが可能である。但し、この議論は弾性係数が均質な所でのみ可能である。μはせん断率を表すので、ここで求まった比が大きければ大きいほど硬いことを表している。したがって、この比を求めることで、人体の部位の硬さが分かる。このような方法の有効性を、粘弾性効果も考慮に入れた人体について数値実験により検証する。

結果・成果

まず本研究開発の数値微分法について数値実験を行い、そのロバストネスについて調べた。その結果観測データの誤差は、再構成における誤差の増幅が高々5倍以内であることを確認した。　また、数値微分法による不連続性同定について研究し、理論的な研究成果を得た。以上の研究により数値微分法のMRE法のデータ解析への応用は、十分整備された。

次に外部研究協力者である菅幹生が人体に似せたゲル状物質に対して行った実験データを数値実験で検証した。即ち、実験で用いられた人体に似せたゲル状物質を非圧縮等方粘弾性体としてモデル化して、その変位ベクトルを支配する方程式の初期値境界値問題を、Chebyshev Spectral Element Methodと呼ばれる高精度な有限要素法を使って計算し、菅幹生の実験データが極めて忠実に再現することに成功した。

次に非圧縮等方粘弾性体が区分的に均質の場合に、その変位ベクトルの成分の一部$u(t,x)$からせん断率μと粘性率ηを求める公式(＊＊)を導いた。即ち、$u(t,x)=\phi(x)\cos kt+\psi(x)\sin kt$とするとき、

$$\mu=\rho k^2(\phi(x)\Delta\phi(x)+\psi(x)\Delta\psi(x))/((\Delta\phi(x))^2+(\Delta\psi(x))^2)$$

(＊＊)

$$\eta=-\rho k(\phi(x)\Delta\psi(x)-\psi(x)\Delta\phi(x))/((\Delta\phi(x))^2+(\Delta\psi(x))^2)$$

である。但し、この公式は非圧縮等方粘弾性体が均質でない所で成り立つかどうかは不明である。

また$\rho=1.0(kg/m^2)$、$\eta=400(Pa\cdot s)$、$k=500(Hz)$として、μは殆どの所で$\mu=7400(Pa)$であるがある一部で$\mu=3300(Pa)$（これが菅幹生の実験で使われている物性値）とするとき、この公式を用いて数値実験データよりμ、ηを再構成した。即ち、この公式の$\phi(x)$、$\psi(x)$としては数値実験値をとり、それに4点差分近似による$\Delta\phi(x)$、$\Delta\psi(x)$の近似計算を行い、この公式を使ってμ、ηを再構成した。その結果、均質な所ではμを良好に再現することが出来た。しかしηは、μに比べて値が小さいためにあまり良く再構成できなかった。そして当然のことであるが、μが不連続となる所では再現の誤差が大きいことが分かった。μの再構成について、その再現結果の真値に対する相対誤差は、殆どの所で5%以下であった。従って、少なくとも数値的に生成された高精度な数値データに対しては、この再構成は有効と考えられる。

この再構成は、あくまでも区分的に非圧縮等方粘弾性体が区分的に均質の場合に限られる。そこでそうでないときにも可能な再構成についても考察し、いわゆるoscillating-decaying solutionと双曲型方程式を用いた再構成を与えた。但し、この再構成は数学的には可能だが、実用的な方法とは言い難いのが難点である。

今後の展望

今回の数値実験では、観測データは高精度なため、我々のTikhonovの正則化による最小二乗法に基づく数値微分法を用いる必要はなかった。そこで菅幹生の実験データに対して、公式(**)と我々の数値微分法を用いてμの再構成を試みる必要がある。また、再構成はすべて実験データの精度に依存しているので、実験の精度向上を計る必要がある。特に加振装置を改良し、高周波の加振を実現することが重要である。

また、一般の非圧縮等方粘弾性体にも適用可能な実用的な再構成の方法を考える必要がある。例えば、周波数に関する漸近解析により局所波長、減衰率を有効に定義して、実験データと当てはめることによりμ/ρ、η/ρを近似的に求めるのが実用的な方法と思われる。