粒子間相互作用力決定問題の理論的解析

渡邊 道之［北海道大学／学術研究員］

背景・目的

同種の粒子がN個ある体系を考える。問題は、粒子間に働く相互作用力及び、全粒子に働く外力ポテンシャルを、遠方に散乱された粒子の観測データから決定することである。この問題に対し、理論的、数学的な側面からの研究を行う。多数の粒子が存在しても、相互作用がなく、それぞれが独立に運動している場合には、本質的には一粒子の問題であってあまり大きな困難はない。難しいのは粒子が互いに力を及ぼしあっている場合であって、古典力学のときもそのような多体問題を解くことは、ごく限られた特別な問題を除き、一般には不可能であると言われている。量子力学においても同様であって、厳密な解を求めることができる実際的な問題はほとんど無いと言われている。

内容・方法

今日では、多体問題に対する様々な近似法が考察されている。本研究ではその中の一つ、ハートリーの近似法と呼ばれている方法で得られる方程式、すなわち時間依存ハートリー方程式（TDH）及び時間依存ハートリー・フォック方程式（TDHF）を利用し、粒子に働く相互作用力を決定することを解析した。これらの方程式は非線形の方程式であり、全粒子に働く外力ポテンシャルは方程式の線形部分の係数に、またそれぞれの粒子に働く相互作用ポテンシャルは非線形項の中に現れる。さらに、これらの方程式の解で定義される散乱作用素は粒子の散乱状態を表すものと考えられる。TDH及びTDHFの解で定義される散乱作用素から方程式の未知係数及び非線形項に表れる未知関数を決定するという逆散乱問題について数学解析を行った。

困難な点は、逆問題は方程式が線形であっても非線形の問題であり、従って方程式が非線形となると逆問題はさらに非線形性が強くなる。ゆえに求める未知関数を具体的に求めることは大変困難になってくる。研究方法としては、この困難さを回避するために低振幅極限を用いて問題を線形化するという技法で解析した。

結果・成果

粒子が3個の場合で、お互いの相互作用のみが働いている系を考察した。さらに相互作用力としては簡単な形$\lambda_j |x|^{-\alpha_j}$, $j=1,2,3$ で表される場合を扱った。λ_jは各粒子間に働く相互作用の力の大きさを表し、α_jは粒子間の距離が離れたときの力の減衰の様子を表す。まず、α_jがある数の範囲内にあれば粒子は散乱状態にあることがTDH及びTDHF方程式から確かめられた。つまりそれぞれの方程式に対して、散乱作用素が定義できることを証明した。次にそれぞれの散乱作用素から相互作用力、つまりλ_jとα_jを求めるための公式を作った。

TDH方程式は、多体系の波動関数を変数分離の形で書き、変分法を用いて導出された方程式であるが、この場合の波動関数は対称性を満たしていないという問題点があった。これを改善して得られた方程式がTDHF方程式である。TDHF方程式では波動関数をスレイター行列式で書き、変分法を用いて導出される。2つの行が等しいと行列式は零になり、これは物理的に意味のない波動関数となる。従ってTDHF方程式の解はそれぞれ一次独立でなければならない。このTDHF方程式の解の特徴が今回得られた公式の中にも現れた。

TDH方程式を用いて得られた相互作用力を求める公式は、ソボレフ空間H^1に属する任意の恒等的に零でない関数から得られる散乱データに対して成り立つ。類似の公式はTDHF方程式の場合でも得ることができたが、TDHF方程式に対して得られた結果は、互いに一次独立で、さらに特殊な関数に対して定義される散乱データから相互作用力を求める公式が導ける、ということである。

粒子が4個以上の場合も考察したが、この場合未知関数の数の方が既知関数よりも多くなってしまい3個の場合と同様の公式を得ることは難しいことがわかった。粒子が3個の場合のみ、未知関数の数と既知関数の数が一致して問題がきれいに解けた。4個以上の場合は問題の定式化を考え直す必要があるだろう。ただし、一意性の結果、つまり二つの散乱作用素が等しければ未知の相互作用力も等しい、ということはTDH方程式の場合についてはわかった。TDHF方程式の場合には技術的に困難な点があり、まだ証明できていない。

今後の展望

本研究で粒子が3個の場合は相互作用力を散乱データから決定できることがわかった。今後の展開は次のようになる。

- 相互作用力だけでなく全粒子に働くポテンシャルも散乱データから決定できるかを解析する。
- 本研究では遠方で十分早く減衰するような相互作用力しか考察しなかったが、クーロン力に代表されるようなもっとゆっくり減衰する相互作用力に対しても散乱データから決定できるかを解析する。
- ハートリーの近似法以外の方法で得られる方程式に対して、本研究で得られた公式の導出法が応用できるかを検討してゆく。