様々な次数付き環とその商体の整数論的及び組合せ論的研究

大浦　学［高知大学理学部／助教授
（前 札幌医科大学医学部／講師）］

陸名 雄一［東京都立大学大学院理学研究科／PD］

背景・目的

当研究は「様々な次数付き環とその商体の整数論的及び組合せ論的研究」をテーマとし、有限群の線型作用による様々な不変式環とその商体を組合せ論的・整数論的観点から考察する。特に有理数体上の3次有限線型群に注目し、対応する不変式環及びその商体の有理性の考察を目的として研究を行う。この研究を含めてこれからなされるであろう高次元線型群に対するGalois逆問題の研究は、今後の組合せ論・整数論に於て極めて重要な位置にあると思われる。

内容・方法

我々が行った研究は非常に具体的である。有理数体上の3次正方行列からなる有限位数の行列群を考える。この行列群は自然に有理数体上の3変数多項式環に作用するが、ここではその作用により不変な元のなす環（不変式環）を考える。まず問題は不変式環の構造を調べることである。一般にこの環は広中分解と呼ばれるよい性質を持っている。我々が行うのはまずその広中分解を与えることである。次にその不変式環の商体を具体的に決定する。不変式環の環としての生成元がわかっているとその商体の生成元もわかるのであるが、問題はその生成元が最小個数（今の場合は3個）で生成できるか否かを決定することである。考えられる最小個数3個で生成できる場合、その商体は有理数体上純超越拡大である（もしくは有理的）という。今回の考察においては、全ての場合が有理的であったわけであるが、いずれの場合も特異点をブローアップしていくことにより、その有理性が決定された。

結果・成果

ここで考えるのは3x3の行列からなる有限位数の行列群であって、行列の成分は有理数であるもののみである。

そのような群で有理数共役であるものは同じ不変式環をもつので、有理数共役類を完全に決定することが必要である。有理数共役類の分類自体は既によく知られているが、我々の目標は各共役類の相互関係を環論・体論の立場で考察することにあるので、既存の結果では情報が不十分である。そこで我々はこの共役類の代表系の選び方を工夫し、各不変式環の相互関係の考察が可能な形にした。次に、上記で得られた共役類の代表系の各元に対してその不変式環を計算する。有限群の不変式環はCohen-Macaulay環としての構造を持ち、広中分解と呼ばれる表示を持つ。一般に広中分解の表示は一意的ではない。我々は各共役類の代表の不変式環の相互関係を最も見易い形にする表示について考察し、その結果として非常に合理的な形での表示に成功した。

不変式の商体の超越次元は3であるから、その商体の生成元の間には有理数体上の代数的関係式が存在する。我々が今考えている線型Noether問題は「その商体が有理数体上純超越的か」と言い換えることができる。これは、上で得られた代数関係式で定義される有理数体上の代数多様体が有理数体上の有理代数多様体となるか」という問題と同値である。我々は代数多様体の特異点解消を与える有理数体上の双有理写像を具体的に構成することによって、全ての場合に対する線型Noether問題を肯定的且つ具体的に解決した。これは部分的には知られていた結果であるが、当研究によって有理数体上の3次一般線型群の全ての有限部分群に対してその線型Noether問題が肯定的であることが初めて完全に確定された。

ある群を固定した場合、有理数体上のGalois拡大の様子を記述するgeneric polynomialと呼ばれる多項式がある。その具体的構成はGalois逆問題の構成的研究に於ける最も重要な目標である。我々は、上で考察した場合に対してgeneric polynomialを具体的に構成した。当研究では群とその部分群の関係がある場合にそれぞれのgeneric polynomialの間の関係を完全に解明し、部分群のgeneric polynomialをそれを含む群のgeneric polynomialから得る方法を具体的に与えた。これは陸名によって最近提唱された「generic polynomialの幾何学的降下理論」の非常に重要な例であり、以上の研究によって有理数体上の3次一般線型群の有限部分群に対するGalois逆問題は完全に解決されたことになる。

今後の展望

4次元以上の線型群に対するNoether問題・Galois逆問題は、高次元結晶群の分類という困難の為に、現在まで殆んど研究が進んでいない状態であったが、当研究によって得られた手法は更に高次元の場合に対しても適用が可能であり、既に4次線型群のかなり多くの有限部分群に対して結果を得ている。この有限部分群の中には対応するNoether問題の肯定解が存在しないものが含まれている。これらの整数論的性質の解明を含め、高次元線型群に対するGalois逆問題の研究は今後の組合せ論・整数論に於て極めて重要な位置にある。当研究は、これら諸問題に直結する研究として更なる発展が期待されている。