材料工学にあらわれる非線形問題の数学的な解析

高坂 良史 ［室蘭工業大学工学部／講師］

背景・目的

近年非平衡状態では動いている（多成分系合金などにあらわれる）相境界の運動や結晶成長の過程を数学的に解析する研究が活発になされており、それらが時間発展とともにどのように変化していくかを理論的に解析する問題（自由境界問題）が注目されている。本研究では相境界の運動を表す方程式として、1950年代にMullinsによって材料工学に関する論文の中で提唱された平均曲率流方程式と表面拡散流方程式に着目し、これらの微分方程式を理論的に解析することで、相境界の時間大域的な動きを数学的にとらえることを目的とする。

内容・方法

相境界の時間大域的な動きを数学的にとらえる場合、上記の幾何学的発展方程式に対応する定常解に着目し、それらの安定性を調べることは、理論的な解析において一つの有効な手段である。したがって、上記の発展方程式に対応する定常解を求め、それら定常解の安定性の判定基準を数学的に導く。より具体的には、平均曲率流方程式であれば線分、表面拡散流方程式であれば線分又は円弧が定常解となる−これらの定常解は発展方程式に付随するエネルギー汎関数の最小解（minimizer）でもあり得る−ので、時間発展する相境界をこれらの定常解の周りでパラメータ表示し、それによって上記の幾何学的発展方程式から導出される非線形偏微分方程式の境界値問題を数学的に解析することで、定常解の安定性の判定基準を導く。ここで、非線形偏微分方程式の境界値問題の解析では、定常解の周りでの線形化問題に対応する固有値問題の解析が解析の基礎となる。

結果・成果

結果を述べるにあたって、内容・方法で述べた解析手法をより詳しく述べる。

今、有界領域内の相境界の運動を平面的にみて、相境界の時間発展を2次元有界領域内における曲線の時間発展としてとらえる。このとき、2相を隔てる相境界（曲線）の運動は表面拡散流方程式によって記述されている場合を考え、さらにその相境界は、有界領域の境界との交点において、エネルギー的な視点から導かれるある種の境界条件を満たしているとする。ここで、このモデルは以下の基本性質を満たすことが知られている。

(i) 表面拡散流方程式は、エネルギー汎関数

［単位長さあたりの表面エネルギーを表す定数］×［相境界の長さ］

のH^{-1}-勾配流である。

(ii) 相境界によって隔てられた各領域の面積は保存される。

この(i)、(ii)の基本性質をふまえ、以下のような手順で解析を行った。

①表面拡散流方程式の定常解（線分又は円弧）の周りで相境界をパラメータ表示し、表面拡散流方程式によって記述された相境界の運動を表すモデルを4階の非線形偏微分方程式の境界値問題として表す。

②①で得た非線形問題を定常解の周りで線形化し、線形化問題を導出する。

③②で導出した線形化問題に対応する固有値問題を適切な関数空間のもとで解析する。ここで、すべての固有値が負であれば定常解は（線形）安定、一つでも正であれば（線形）不安定である。この定義をふまえ、固有値の符号変化の条件を調べることで、定常解の安定性の判定基準を導出する。

以上①～③の解析を行い、以下の結果を得た。

今、定常解（線分又は円弧）の曲率を定数kとし、その長さを2lとする。また、定常解が有界領域の境界と交わる点での有界領域の境界の曲率をh_-、h_+とする。このとき、k、lに依存する定数a、b、cに対して、

kが0でない場合：$D(h_-,h_+)=a/c+(b/c)(h_-+h_+)+h_-h_+$

kが0の場合　　：$D(h_-,h_+)=3/l^2+(2/l)(h_-+h_+)+h_-h_+$

とおくと、以下の結果が得られる。

		不安定固有値の数	0-固有値の数
(I)	$D>0,\ h_->-b/c$ の場合	0	0
(II)	$D=0,\ h_->-b/c$ の場合	0	1
(III)	$D<0$ の場合	1	0
(IV)	$D=0,\ h_-<-b/c$ の場合	1	1
(V)	$D>0,\ h_-<-b/c$ の場合	2	0

以上から、定常解が有界領域の境界と交わる点での有界領域の境界の曲率h_-、h_+が(I)の仮定を満たすとき、定常解は（線形）安定であり、h_-、h_+が(III)以降の仮定を満たすとき、定常解は（線形）不安定であることがわかる。したがって、(h_-,h_+)-座標平面上での曲線$D=0$と直線$h_-=-b/c$が定常解の安定性の判定基準として得られたことになる。

今後の展望

今回、表面拡散流方程式によって運動が記述される相境界のモデルに対し、定常解の線形安定性の判定基準を得ることができた。したがって、これをもとに解析半群の理論などを適用することによって、定常解の非線形安定性の解析が進展することが期待される。また今回、2相問題を中心に解析を行ったが、2相問題よりもより複雑な相境界の動きが予想される3重結節点（triple junction）をもつ3相問題に対しても、上記の解析手法が相境界の時間大域的な動きを数学的に解析する上で有効な手段になり得ると思われるので、現在、3相問題への理論の拡張に取り組んでいる。