

非線形数理モデルにおける弱解の公理的構造決定に関する研究

山内 和幸 [室蘭工業大学／非常勤講師]

背景・目的

今日、物理現象や社会現象の解析には様々な数理モデルを用いる。それらの中には微分方程式の理論に基づくものが多い。また、近年、画像処理や金融商品の価格付けの問題にも放物型方程式など、微分方程式を用いる場面が多くなり、その理論の重要性が高まっている。

ところが、これらの方程式の中には古典的な解を持つことができず、解の概念を弱めることで解析をしているものがある。方程式ごとに様々な形で弱解が提案されているのだが、これを統一的に整理してみることが本研究の目的である。従来微分方程式を用いた数理モデルも微分を介さないものとして解析できる可能性も探ってみる。

内容・方法

本研究において、その対象としたものは、退化楕円型方程式とその解概念である粘性解である。退化楕円型方程式の解概念を確立させた後、退化方物型方程式への応用を視野に入れている。粘性解については具体的な方程式に合わせた様々な定式化が提案されている。その定義により、次の性質が成立することが期待されている。

- (1) 粘性解は古典解の拡張概念になっている。(古典解との整合性)
- (2) 解が存在している。(解の存在性)
- (3) 解がただ一つである。(解の一意性)
- (4) 方程式を近似したとき、その解は元の解の近似解になっている。(方程式の安定性)

これらは粘性解の技術的な定義によって成立するのだが、本研究は、公理的な構造として、それぞれ独立した性質として扱う。そのため、対象となる微分方程式を「微分」の概念から切り離し、別の言語で記述・解析を行う。また、方程式の等号・不等号の概念を拡張して、粘性解と古典解の整合性を中心に解析を行った。

結果・成果

二項関係のうち、反射律および推移律が成立するものを擬順序と呼ぶ。このような擬順序は解析対象となる関数空間に様々な形で入れることができる。本研究ではこれを用いて解の概念を構成する。

二項関係全体は集合論的な自然な形で順序を入れることができる。その順序により、擬順序全体もまた順序集合とみなすことができる。このとき、任意の擬順序族の下限はまた擬順序と

なる。さらに、擬順序の帰納的順序集合の極大元もまた擬順序となる。これを用いて、方程式に影響し、弱解の概念を意味付ける擬順序の構成方法を考察し、その性質の一部を明らかにした。

擬順序のこの結果を用いて弱解を構成するとき、擬順序に関する順序保存関数(order-preserving function)を用いることが本研究独自の手法である。ここでいう順序保存関数とは擬順序のある空間から実数体への写像で、擬順序の関係を実数上の自然な順序に保つものである。これを用いて、退化楕円型をつくる関数は定義域外のものに対しても、「弱い意味」で値を持つことができるよう、等号・不等号の概念を拡張させることに成功した。この定義は次の意味で、古典的な等号・不等号との整合性をもつ。すなわち、古典的な意味で等号・不等号が成立するときは、「弱い意味」でも等号・不等号が成立する。逆に、「弱い意味」での等号・不等号が成立するときについて、その対象が関数の定義域にあり、古典的な意味を与えることのできるものであるのなら、従来の等号・不等号が成立する。

さらに、解概念を弱めることに関して、粘性解的な解の間の整合性についても解析を行った。結果、擬順序を強めながら、試験関数を制限するならば、得られる弱解は元の弱解の拡張になることが確かめられた。すなわち、新しい解概念を構成するために、擬順序を強め、試験関数を制限する従来の方法は整合性の点からも正当であるということを示すことができたわけである。

一方、微分方程式と順序保存関数の関係についても考察を行った。結果、特別な擬順序を用いることで、任意の退化楕円型方程式は順序保存関数により構成されることがわかった。逆にその順序についての任意の順序保存関数はある退化楕円型方程式の主要項とみなすことができることもわかった。このことは、従来微分方程式の理論で扱われていた解概念を用いて、微分構造の入らない数理モデルの解析の可能性を示唆するものと考える。

以上のことは、学術雑誌「Communication in Applied Analysis」に掲載予定である。

今後の展望

微分方程式の弱解の理論を、関数の微分構造をもちいず展開していくことは、従来、微分方程式を用いていた数理モデルの解析の中には微分構造が本質的でないものがある可能性を示していると思われる。今回の研究では擬順序のみに研究の焦点を絞ったが、将来的には一般的な二項関係についての解析ができると考えている。また、微分方程式をもじいて解析された数理モデルの弱解の意味を二項関係などの言葉で解釈しなおすことを考える。また、逆に、微分構造や位相が設定できずあきらめられていた社会現象などの数理モデル化とその解析の可能性についても解析手段を与えることができると思われる。