符号理論と保型形式論の関係の追求

大浦　学［札幌医科大学医学部数学教室／講師］

背景・目的

符号理論は、情報･通信の分野で生まれ、現在も研究が行なわれているが、数学的な観点からも研究が行なわれている。私は符号理論を数学的な観点から捉え、研究している。私の研究の関することについて言えば、1970年代前半に、不変式論や保型形式論との興味ある研究結果が得られ、現在もそれらの様々な一般化が行なわれている。1990年前後から元々は有限体上で行なわれていた符号理論を環上で行なうことにより、より豊富な結果が得られている。私は代数的な観点からの符号理論や、組合せ論的な観点の符号理論を、保型形式の理論に応用することに興味がある。これまでには、4次ジーゲルモジュラ形式環に関係ある不変式環の次元公式を決定、4次重さ12のジーゲルモジュラ形式の間に成り立つ関係式を決定した。様々な種類のモジュラ形式と符号理論の関係についても明らかにした。

今回の研究においては、一般化されたハミング重みに関する重み多項式、つまりhigherweight enumeratorに関する結果を得た。

内容・方法

符号の持つ性質を調べることが一つの研究内容である。符号といっても多くの種類があり、性質のよい符号に限る必要がある。私の場合、自己双対符号、及び重偶自己双対符号と呼ばれるクラスがそれにあたる。そこで、これらの符号の持つ性質を調べる訳であるが、符号そのものを調べるのではなく、その符号から得られる多変数の多項式、いわゆる重み多項式を研究する。あるクラスを固定し、そのクラス全体の符号から得られる重み多項式全体を考える。これらで生成される環を調べ、できるならばその環構造を決定したい。しかしながら、この環を直接調べるのは多くの場合、困難であるので、この環を含むある不変式環を考える。この不変式環は一般に扱いやすいところが多く、重み多項式環の構造を知るのに非常に便利である。これらの重み他項式、不変式から、テータ函数を仲介して、保型形式が得られ、保型形式への応用をはかる。

私の研究において、計算機の利用は本質的である。符号自身を取り扱ったり、重み多項式を計算するのには、計算機の利用が不可欠である。また、有限生成環の構造を調べる場合には、グレブナー基底が役に立つ。

結果・成果

幾つかの場合において、higher weight enumeratorのなす環の構造を、具体的に決定した。また、higher weight enumeratorに対応して、偶ユニモジュラ格子のテータ函数を定義し、それらの生成する環の構造も決定した。この環は、対応するhigher weight enumarator環と同型であった。幾つかの環を得た訳であるが、一つの場合を除き、Cohen-Macaulayではないという特徴を持つ。

ここで扱う（d次）Higher weight enumeratorは、符号の長さをnとした場合、二変数n次斉次多項式である。符号の重み多項式の線型結合で表すことができ、重み多項式の理論を応用することが可能である。q元体上の自己双対符号のd次以下のhigher weight enumeratorの生成する、複素数体上の環を$A^{(d)}_{Fq}$とおく。任意種数の重み多項式環は、ある有限群の不変式環と一致する、というRungeの定理を用いると、$A^{(d)}_{F2}$は、全ての零以上の整数dに対して全て有限生成であることがわかる。先に述べた様に、higher weight enumeratorは、重み多項式の線型結合で表すことができるので、重み多項式環の生成元が知られている場合には、higher weight enumerator環の場合も生成元が得られる。複素数体上の環としての生成元が与えられた訳であるから、次にそれら生成元の間の関係式が問題となる。ここではグレブナー基底の理論を応用すると、求めるべき関係式が得られ、環構造も決定されることとなる。次数付き環の各々の重さにおける次元、つまり次元公式も具体的に環構造が決定されたのでわかる。

私は、d=0,1,2に対して$A^{(d)}_{F2}$、0以上の全ての整数dに対して、$A^{(d)}_{F3}$、$A^{(d)}_{F4}$を決定した。ここで、$A^{(2)}_{F2}$のみがCohen-Macaulayではなかった。また、$A^{(d)}_{Fq} \subseteq A^{(d+1)}_{Fq}$は定義より明かであるが、$q$=3,4,g≧2に対して、$A^{(2)}_{Fq} = A^{(g)}_{Fq}$であることもわかった。また、偶ユニモジュラ格子に関する種数1の函数を定義し、それらで生成される環Sを決定した。その環は$A^{(1)}_{F2}$と同型であった。環SもCohen-Macaulayである。

今後の展望

Generalized Hamming weightの研究は、有限体上にも限らず、有限個の元からなる環に対しても行なわれつつある。私は、これに対するhigher weight enumeratorに興味を持ち、それらの環構造を研究してきているが、私が行なった場合の他にも、例えばZ_{2k}の場合などはこれから研究されるべきであろう。Hamming weight enumeratorに付随するテータ函数を定義した。二元体上の自己双対符号の場合に、それらのテータ函数を生成する環構造を決定したが、このテータ函数が整数論的な意味合いがあるのかどうか、調べたい。